

UTILIZACION DE LA TECNICA DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS EN TOMOGRAFIA SISMICA.

Alfonso Corz (\*)  
 Enrique Alarcón (\*\*)  
 José Domínguez (\*\*\*)

(\*) E.U.I.T.I. Algeciras. (Universidad de Cádiz)  
 (\*\*) E.T.S.I.I. Madrid. (Universidad Politécnica de Madrid)  
 (\*\*\*) E.T.S.I.I. Sevilla. (Universidad de Sevilla).

**Resumen.**— La tomografía es un sistema de obtención de imágenes internas de sólidos a los que no se tiene acceso directo. Esta técnica ha sido ya de enorme fecundidad en el campo del diagnóstico médico. Hoy día el sistema sigue perfeccionándose y el presente trabajo se enmarca dentro de esta línea, con aplicaciones en el campo de la Ingeniería Civil, utilizando técnicas de discretización del medio investigado, así como la teoría de rayos. Los resultados obtenidos son esperanzadores, y es posible que en un corto espacio de tiempo esta técnica goce de la fiabilidad necesaria en el campo de la Ingeniería.

1.- INTRODUCCION.

La aplicación de la tomografía al problema geofísico, es relativamente reciente, y aunque aparentemente el método resulte idóneo para la determinación de estructuras del subsuelo, tropieza con muchas dificultades a la hora de su aplicación a este tipo de problemas.

En primer lugar, hay que destacar que mientras en los equipos de diagnóstico médica la geometría del sistema de medida es fija, en las aplicaciones geofísicas la geometría varía de una exploración a la siguiente, ya que es función del problema a resolver.

La segunda, y gran desventaja, es que si utilizamos en la exploración del medio ondas sísmicas, estas han de ser de baja frecuencia, o sea gran longitud de onda, para de este modo evitar la rápida atenuación con la distancia, ya que el terreno se comporta como un filtro para las altas frecuencias. Como consecuencia la resolución baja, ya que los objetos detectados serán mayores que la longitud de onda empleada.

El tercer problema a resolver es que mientras que en los "scanner" de diagnóstico médica las trayectorias de los rayos son rectas, en la aplicación geofísica, aplicando ondas sísmicas, esto no ocurre con lo cual el problema se hace de difícil solución.

Partiendo de anteriores investigaciones, se ha desarrollado un sistema de cálculo me-

diante la técnica de elementos discretos, que intenta simplificar los anteriores métodos utilizados hasta la fecha.

2.- DISCRETIZACION.

Supongamos un dominio  $\Omega$ , con una frontera  $\Gamma$ , de tal forma que sobre una parte de la misma  $\gamma_0$ , se aplican una serie de excitaciones que son detectadas sobre  $\gamma_1$ , después de haber transcurrido un tiempo  $T_i$  en el recorrido  $i$ , realizado en el interior del dominio, figura 2.1.

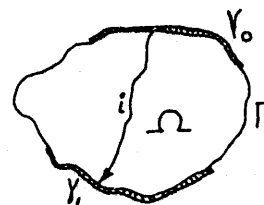


Fig. 2.1

El problema que se plantea, es para una frontera conocida  $\Gamma$ , y con unas zonas  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , asimismo conocidas, determinar el campo de velocidades  $V$  en el interior de  $\Omega$ , a partir de una función de datos de tiempos de recorrido  $\tau$ . De este modo el problema en un principio se podría plantear como:

$$V = A \cdot \tau \quad (2.1)$$

donde  $V$  es la función de velocidades extendida al dominio  $\Omega$ ,  $A$  un operador y  $\tau$  una función de los tiempos de recorrido.

Es prácticamente imposible obtener un método general que nos de una función continua  $V$ , con lo cual hemos de ir indefectiblemente a buscar un método mediante el cual obtengamos una aproximación suficiente de  $V$ .

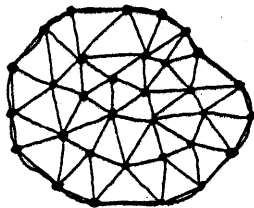


Fig. 2.2

La discretización del dominio, se realiza con elementos triangulares, sobre los cuales se define una función  $V_n$ , como aproximación de  $V$ . Las funciones utilizadas son lineales, lo cual presenta una serie de ventajas en cuanto a la tipología de trayectorias así como en el cálculo de los tiempos de recorrido elementales, tal como puede observarse en la tabla 2.1.

Tabla 2.1

$$\begin{aligned} k \neq 0 \quad \delta_s \neq 0 \quad x &= \frac{\cos \delta_s}{k p} \pm V \frac{1}{k^2 p^2} - \left( \frac{V_s}{k} + z \right)^2 \\ t &= \frac{1}{k} \left( \cos h^{-1} \frac{1}{p V_0} - \cos h^{-1} \frac{1}{p V_z} \right) \end{aligned}$$

$$k \neq 0 \quad \delta_s = 0 \quad x = (Z-N)/M \quad t = \ln(V_z/V_1)/K$$

$$k=0 \quad x = (Z-N)/M \quad t = \Delta s/V$$

### 3.- INVERSION CINEMATICA

El objetivo propuesto, era la obtención de la distribución de velocidades en el medio sometido a examen, de modo que obtengamos un modelo visualizado, de forma gráfica, del mismo denominado imagen.

Si aplicamos la ecuación que nos da el tiempo consumido por un rayo al viajar de un punto a otro de un medio no homogéneo, tendremos:

$$T_K = \int_{R_K} \frac{1}{v(x,y)} ds \quad (3.1)$$

En la anterior formulación,  $K$  nos indica el número de rayo en cuestión, y será uno de los que nos una una fuente con un detector, y siguiendo a JEFREY-DINES /1/ realizamos el siguiente cambio de variable:

$$L_K = c T_K \quad (3.2)$$

En este cambio de variable,  $c$  representa la velocidad de las ondas en el medio circundante.

La fórmula (3.1), quedará por lo tanto transformada en la siguiente, (3.3), en donde  $n(x,y) = c/v(x,y)$ , se entiende como un índice de refracción relativo.

$$L_K = \int_{R_K} n(x,y) ds \quad (3.3)$$

El objetivo será, por lo tanto, linealizar la formulación (3.3), de forma que obtengamos un sistema de ecuaciones fácilmente solucionable mediante algún método clásico.

Dado que el camino del rayo depende del modelo de velocidades, o sea del modelo de índices de refracción, la solución no es inmediata, y únicamente será posible localizarla mediante aproximaciones sucesivas, esquema este típico en la solución de problemas no lineales.

Normalmente se inician las pruebas con modelos de velocidad constante ( $n=cte$ ), para ir en cada ciclo de cálculo modificando este modelo hasta conseguir una respuesta igual a la obtenida en el caso real.

El sistema de ecuaciones se deducirá de discretizar la formulación (3.3), la cual puede ser escrita en forma incremental como:

$$L_K = \sum_{m=1}^{M_R} \hat{n}(s_m) \Delta s_m \quad (3.4)$$

Nuestro objetivo será expresar  $L_K$ , como una ecuación del tipo (3.5), donde los coeficientes  $a_{k_n}$ , representan la globalización de los efectos de la linealización de (3.4), y  $n_s$  los parámetros del modelo.

$$L_K = \sum_{m=1}^{IJ} a_{k_n} n_s \quad (3.5)$$

Si aplicamos el método de los elementos discretos en el trazado del camino del rayo, tendremos que para un elemento genérico  $I, J, K$ , tal como el de la figura (3.1), con una trayectoria genérica, pero que dentro de esa generalidad está forzada por la propia sistemática del método a ser un arco de círculo o una recta, la relación:

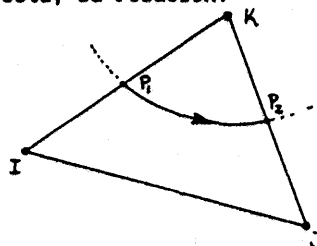


Fig. 3.1

$$\hat{n} = A1 n_I + A2 n_J + A3 n_K \quad (3.6)$$

donde los coeficientes  $A1, A2$  y  $A3$  tienen los siguientes valores:

$$A1 = a \left( 1 - \frac{\overline{IP_1}}{\overline{IK}} \right)$$

$$A2 = b \left( 1 - \frac{\overline{JP}_1}{\overline{JK}} \right)$$

$$A3 = a \frac{\overline{IP}_1}{\overline{IK}} + b \frac{\overline{JP}_1}{\overline{IK}}$$

donde los coeficientes a y b son:

$$a = \frac{np_i - \bar{n}}{np_i - np_1}$$

$$b = \frac{\bar{n} - np_1}{np_i - np_1}$$

Para el trozo de rayo considerado, supon-  
gamos identificado con el elemento i-ésimo,  
tendremos una expresión para  $L_i$  tal como:

$$L_i = (A1 n + A2 n + A3 n) * s_i \quad (3.7)$$

donde  $s_i$ , representa el camino recorrido  
dentro del elemento, que es conocido del tra-  
zado del rayo.

En definitiva nos queda para un elemento  
genérico:

$$L_i = B1 n_I + B2 n_J + B3 n_K \quad (3.8)$$

Dado que el  $L_K$  será la suma de todos  
los  $L_i$  de ese rayo, obtenemos fácilmente  
la relación de  $L_K$  con todos los  $n_m$ .

De acuerdo con el procedimiento seguido  
hasta este punto, conocemos los coeficientes  
de los  $n_m$ , conocemos los  $n_m$ , por ser los  
propuestos, luego tenemos los  $L_K$ . La ecua-  
ción expresada en notación matricial será:

$$A \cdot n = L \quad (3.9)$$

Con esta matriz A, así obtenida, realiza-  
remos la estimación del nuevo modelo, en ba-  
se a las diferencias observadas entre el vec-  
tor  $L$  obtenido y el  $L_0$  de datos, para lo  
cual para un paso genérico en la iteración  
tendremos:

$$A \cdot \Delta n = \Delta L \quad (3.10)$$

Una vez obtenido el vector  $n$ , tendremos  
la estimación para el próximo modelo a ensa-  
yar:

$$n_m^{(p+1)} = n_m^{(p)} + \Delta n^{(p)}$$

Se define de esta forma un proceso itera-  
tivo que nos debe conducir a la obtención  
del verdadero vector imagen  $n$ , aunque ya ve-

remos en un apartado posterior que el proceso  
no es tan sencillo y que tenemos que operar  
con una técnica muy cuidadosa para poder lle-  
gar a un resultado suficientemente aproximado.

#### 4.- BUSQUEDA DE UN MODELO POR APROXIMACION DE MINIMOS CUADRADOS.

La ecuación planteada, que relaciona el  
vector error de datos y  $\Delta n$ , es del tipo:

$$\Delta Y = A \cdot \Delta X \quad (4.1)$$

Dado que el objetivo propuesto es averi-  
guar  $\Delta X$ , la solución parece simple, ya que  
invirtiendo la matriz A, tendríamos el vector  
incremento estimado.

$$\Delta X = A^{-1} \cdot \Delta Y \quad (4.2)$$

El problema comienza cuando observamos  
que la matriz A no es, normalmente, cuadrada.  
La inversión no puede realizarse pues de un  
modo simple, en el sentido estricto de la pa-  
labra, y hemos de recurrir al empleo de la  
técnica de mínimos cuadrados para conseguir  
un operador que nos permita obtener un  $\Delta X$   
estimado con suficientes garantías.

Sea  $\Delta X$  el vector incremento a obtener,  
con lo cual se pueden plantear las siguientes  
transformaciones:

$$A \Delta X = \Delta Y$$

$$A^T \cdot A \Delta X = A^T \Delta Y$$

Definiremos un vector estimado de  $\Delta X$ ,  
como:

$$\Delta X = (A^T A)^{-1} A^T \Delta Y \quad (4.3)$$

Con el objeto de hallar un inverso apro-  
piado, aplicamos la descomposición singular  
para la matriz A propuesta por MENKE / 2 /

$$A = U A V^T \quad (4.4)$$

Si definimos como pseudoinverso para la  
ecuación (4.15), la matriz H, definida como:

$$H = (A^T A)^{-1} A^T \quad (4.5)$$

y operando adecuadamente podemos deducir para  
 $H$ , una estructura de descomposición similar  
a la obtenida para A, con lo cual obtenemos:

$$H = V A^{-1} U^T \quad (4.6)$$

De esta forma obtenemos lo que se suele  
denominar un inverso generalizado para la ecua-  
ción propuesta.

Veamos algunas características a tener  
en cuenta en esta inversión.

En primer lugar si en la ecuación (4.2), premultiplicamos por  $H$  ambos términos y a continuación comparamos con la ecuación (14), podemos deducir la siguiente relación entre  $\Delta \underline{X}$  y  $\Delta \underline{X}$ :

$$\Delta \underline{X} = H A \Delta \underline{X} \quad (4.7)$$

Por lo tanto la matriz  $H$ , será un inverso generalizado más apropiado en la medida que  $H A$  se aproxime más a la matriz unidad. Este producto se suele denominar como matriz  $R$  de resolución o de los Kernels de resolución:

$$R = H A = (V A^{-1} U^T) \cdot (U A V^T) = V V^T \quad (4.8)$$

Vemos que  $R$  representa en realidad el grado de unicidad de la solución en el espacio parametrizado, mientras que el producto de  $A H$ , representa la aproximación conseguida en cuanto a los datos del modelo, y se expresa mediante una matriz  $N$  tal como se muestra a continuación:

$$N = A H = (U A V^T) (V A^{-1} U^T) = U U^T \quad (4.9)$$

Este proceso de inversión que hemos descrito, puede tener algunos problemas de inestabilidad, a causa de la mayor o menor singularidad del producto  $A^{-1} \cdot A$ , de donde se extraen los autovalores cuyas raíces aparecen en  $A$ . Un autovalor excesivamente pequeño, puede dar lugar a una variación excesiva del vector estimación  $\Delta \underline{X}$ .

Ya hemos visto, en la formulación anterior, que el principal problema con el que nos enfrentamos para realizar una estimación adecuada del vector  $\Delta \underline{X}$ , es la incertidumbre que se produce para el caso de encontrar autovalores próximos a cero.

Los valores próximos a cero de los autovalores, se pueden producir por defectos en los cálculos o bien por una información escasa sobre alguno de los parámetros del modelo.

Hay dos formas básicas de evitar los problemas de inestabilidad, derivados de la utilización de estos autovalores, como es fácil deducir de la observación de la formulación (4.6).

Supongamos un espectro de autovalores tal como el representado en la figura (4.1):

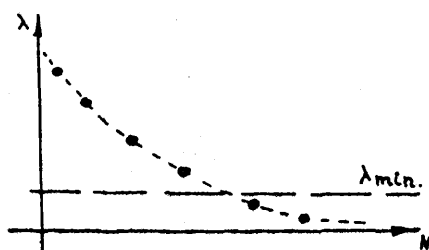


Figura 4.1

El procedimiento más directo para evitar el problema, será eliminar aquellos autovalores que sean menores que un valor prefijado, con lo cual a la vez que eliminamos el problema eliminamos también parte de la información, que si bien con menor importancia que la restante, podría tener cierto valor que facilitase el hallazgo de la solución verdadera.

El segundo procedimiento que se ha escogido es el segundo de los anteriormente enunciados, y realizaremos a continuación una breve síntesis del mismo.

El problema se plantea en forma de minimización de un funcional de error tal que:

$$F = (A \Delta \underline{X} - \Delta \underline{Y})^T \cdot (A \Delta \underline{X} - \Delta \underline{Y}) + \theta^2 \Delta \underline{X}^T \cdot \Delta \underline{X} \quad (4.10)$$

En la formulación anterior,  $\theta$  es un coeficiente ponderador que en este caso se puede asociar a la inversa de la varianza de las observaciones.

La condición de mínimo para el funcional  $F$ , será:

$$(A^T A + \theta^2 I) \Delta \underline{X} = A^T \cdot \Delta \underline{Y} \quad (4.11)$$

De donde podemos deducir una nueva pseudoinversa generalizada  $H$ , que tendría ahora la siguiente expresión:

$$H = (A^T A + \theta^2 I)^{-1} \cdot A^T \quad (4.12)$$

Si aplicamos la descomposición singular de  $A$  en la ecuación (4.11), obtenemos:

$$(V A^T V + \theta^2 I) \Delta \underline{X} = V A^T U^T \Delta \underline{Y} \quad (4.13)$$

De donde podemos obtener ya la expresión del estimador:

$$\Delta \underline{X} = V [A^T + \theta^2 I]^{-1} A^T U^T \Delta \underline{Y} \quad (4.14)$$

Si denominamos como matriz  $\theta^{-1}$  la parte de la expresión (4.14), interior a los corchetes, podremos expresar la ecuación en forma más compacta:

$$\Delta \underline{X} = V \theta^{-1} U^T \cdot \Delta \underline{Y} \quad (4.15)$$

Vemos, por lo tanto, que la matriz  $H$  toma ahora la siguiente expresión, en la cual la matriz  $A^{-1}$ , ha sido sustituida por la matriz  $\theta^{-1}$ .

$$H = V \theta^{-1} U^T \quad (4.16)$$

Hay que hacer resaltar que dada la estructura de los términos de la matriz  $\theta^{-1}$ , se consigue plenamente el efecto deseado, ya que para pequeños autovalores, los  $\theta_i$  no se hacen extremadamente grandes, y para autovalores grandes los términos  $\theta_i$  tienden a ser los de la matriz  $A^{-1}$  que teníamos inicialmente.

El efecto de este procedimiento, puede observarse comparativamente con el de simple anulaci3n en la figura (4), viendose que su resultado es mucho m1s adecuado.

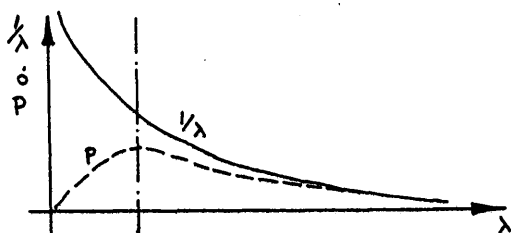


Fig. 4.2

## 5.- ESTUDIO DEL CAMPO DE VELOCIDADES DE UNA ZONA DE UN ESTRATO.

Se presenta la resoluci3n del problema de averiguaci3n de un campo de velocidades correspondiente a una mayor compactaci3n del medio o bien a una mezcla gradual de distintos materiales.

Se tom3 como modelo de simulaci3n un campo de velocidades tal como el mostrado en la figura 5.1, con velocidades extremas de 2 y 2.4 Km/seg. Una vez realizada la simulaci3n y obtenidos los registros de tiempos, damos comienzo al proceso de inversi3n.

Se han utilizado 6 fuentes de emisi3n y 6 receptores, lo que hacen un total de 36 rayos.

La discretizaci3n propuesta se muestra en la figura 5.2, con 18 elementos y 16 nodos, y en ella se aprecia la situaci3n de los emisores y receptores.

La imagen obtenida, figura 5.3, es aproximada respecto de la real, aunque es de resaltar el buen grado de aproximaci3n conseguido, ya que en el 85% de los puntos el error est1 por debajo del 6% y 1nicamente en el 15% de los puntos supera este valor, estando de todas formas acotado por debajo del 10%, figura 5.4.

## 6.- CONCLUSIONES.

El uso de la t3cnica de elementos discretos facilita la resoluci3n de problemas tomogr1ficos y abre un campo de trabajo del que se pueden esperar muy buenos resultados. La simplificaci3n conseguida para las trayectorias, que son convertidas en segmentos de curvas y puesta en funci3n de los valores nodales, consigue la linealizaci3n y tratamiento globalizado del sistema de ecuaciones.

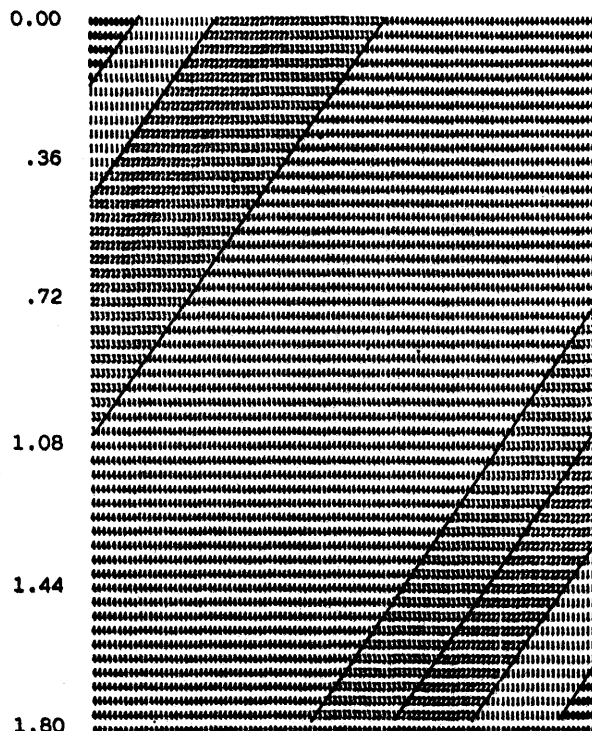


Fig. 5.1.- DISTRIBUCION DE VELOCIDADES. desde 2.00 a 3.00 con incrementos de .1000

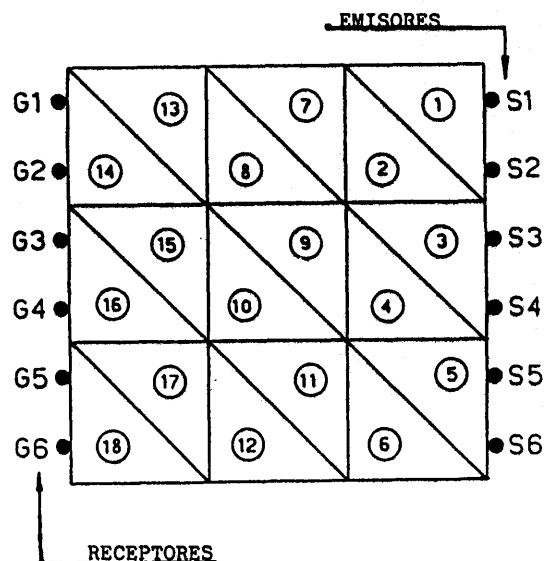


Fig. 5.2.- DISCRETIZACION DEL MEDIO.

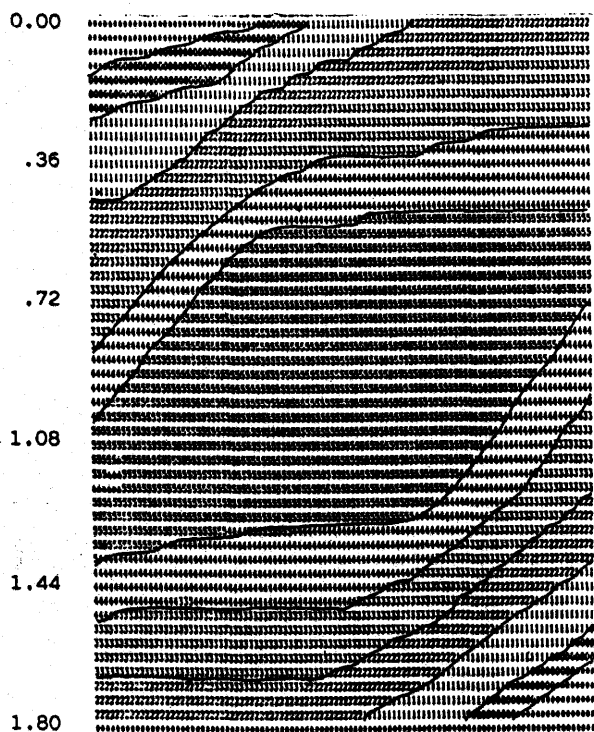


Fig. 5.3.- DISTRIBUCION DE VELOCIDADES  
desde 2.00 a 3.00 con incrementos  
de .1000

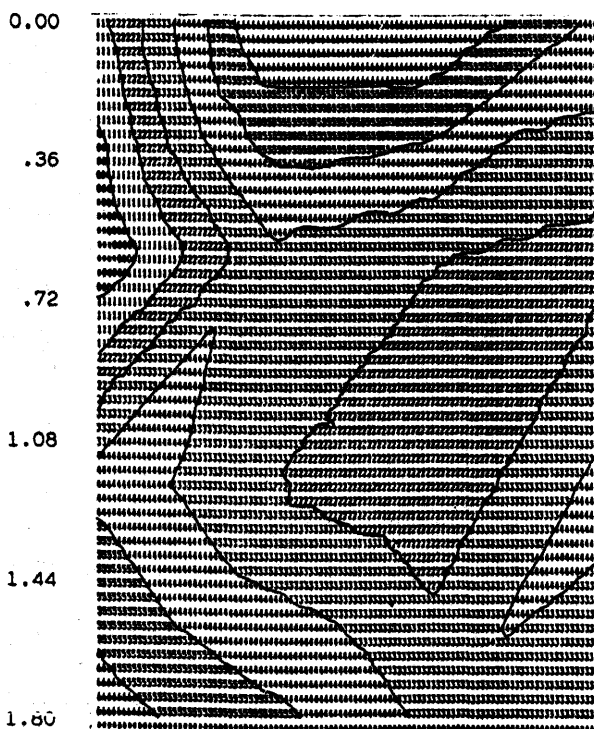


Fig. - DISTRIBUCION DE ERRORES  
desde 1.00 a 15.00 con incrementos  
de 1.4000

## REFERENCIAS

- 1.- DINES; K.A. / JEFFREY LYTLE, R.  
"Computerized geophysical tomography".  
IEEE proc. Vol. 67. , (1.979)
- 2.- MENKE, W.  
"Geophysical data analysis: Discrete in-  
verse theory". - Academic Press, (1.984).
- 3.- ACHENBACH, J.D.  
"Wave propagation in elastic solids"  
North-Holland (1.973)
- 4.- ALARCON, E.  
"Seismic migration by the ray tracing  
method".  
Internal report. I.B.M. Palo Alto Scien-  
tific Center, (1982).
- 5.- BABICH  
"On the ray methods of the computation of  
the intensity of wave fronts".  
Izv. Akad. Nauk SSSR, Geophysical Series.  
nº1, (1985)
- 6.- BALCH, A.H. / LEE MYUNG W.  
"Vertical seismic profiling"  
D. Reidel Publishing Company, (1984)
- 7.- CANAS, J.A. / LEDESMA, A.  
"Método de inversión generalizada: apli-  
cación en sismología y posibilidades en  
ingeniería civil".  
Métodos numéricos para el cálculo y dise-  
ño en ingeniería. Vol. 1. nº 2, (1985).
- 8.- CORZ, A.  
"Comparación de la discretización de un  
modelo geofísico mediante las técnicas de  
interpolación con "Splines", frente a la  
técnica de los elementos triangulares".  
Anales de Ingeniería mecánica, (1.985).
- 9.- CERVENY, V.  
"Ray method in seismology".  
Univerzita Karlova, (1.977).
- 10.- CROSSON, R.S.  
"Crustal Structure modeling of earthquake  
data. Simultaneous least squares estima-  
tion of hypocenter and velocity paramet-  
ers".  
Journal of Geophysical Research. Jun.  
10., (1.976).
- 11.- DOMINGUEZ, J / ALARCON, E.  
"Elastodynamics". Progress in Boundary  
Element Methods. - Brebbia, C.A. Editor.  
Vol. 1, Chap. 7, Pentech-Press, London  
1981.
- 12.- GONZALEZ, M.  
"Método interactivo para la extrapolación  
de ondas sísmicas. Aplicación a la  
prospección geofísica".  
Anales de ingeniería mecánica, (1.983).
- 13.- LYTLE, R.J. / DINES, K.A.  
"Iterative ray tracing between boreholes  
for underground image reconstruction".  
IEEE. trans. on Geoscience and remote  
sensing. Vol. GE18., (1.980).